

Modèle EANO

Le modèle EANO a été développé par Derivexperts pour prendre en compte les caractéristiques spécifiques des stock options dans le cadre d'une valorisation IFRS2.

Principe

Le modèle EANO reprend les hypothèses et l'équation dérivée du modèle de Black & Scholes. D'un point de vue de la théorie d'arbitrage, l'algorithme est donc consistant avec les modèles utilisés pour valoriser les options simples dont les transactions sont observables sur le marché. Afin de pouvoir tenir compte des caractéristiques particulières des stock options, nous utilisons un algorithme de différences finies. Il s'agit donc d'une méthode numérique qui s'appuie sur la discrétisation du temps et du cours du sous-jacent. Il est ainsi possible sur chaque point de cette grille de tenir compte du comportement des bénéficiaires en fonction du cours de l'action et des droits qui leur sont conférés à ce moment là. L'exercice anticipé post vesting peut être motivé par deux raisons:

- un départ de la société, si le bénéficiaire perd tous ses droits, il peut décider d'exercer par anticipation.
- Pour figer sa plus value et profiter de conditions de marché qui lui paraissent favorables, le bénéficiaire devra exercer ses options par anticipation.

Le taux de départ est introduit dans l'algorithme en ajoutant à chaque pas de temps un pourcentage de valeur intrinsèque correspondant au taux d'options exercées sur la période. Quant à l'exercice anticipé non optimal, il est pris en compte dans l'algorithme en forçant comme c'est le cas pour une option à barrière avec exercice automatique, le prix de l'option égal à la valeur intrinsèque au dessus du seuil estimé de plus value qui déclenchera l'exercice. Ces deux paramètres supplémentaires de la modélisation sont estimés par une étude historique sur le comportement des bénéficiaires des plans de l'entreprise. Les dividendes sont pris en compte en montant fixe exactement le jour de leur détachement attendu. Enfin, pour les dates postérieures à la date de début d'exercice, l'algorithme teste aussi que la valeur de l'option ne peut pas être inférieure à la valeur intrinsèque (option de type américain).

Algorithme

On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - b) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

avec:

- V la valeur de l'option
- t le temps
- v la volatilité
- S le cours du sous-jacent
- r le taux sans risques
- b le taux de dividende ou de prêt emprunt

Discrétisation

Le temps est divisé en M pas indexés par k.



Le cours de l'action est divisé en N pas indexés par i.

On suppose $w = v\sqrt{t_2}$ tel que t_2 représente un pas de temps et $r_b = r - b$.

On normalise tel que $S = i$.

Explicite

$$V_i^k - V_i^{k+1} + \frac{1}{2} w^2 i^2 [V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k] + \frac{1}{2} r_b i [V_{i+1}^k - V_{i-1}^k] - r V_i^{k+1} = 0$$

Implicite

$$V_i^k - V_i^{k+1} + \frac{1}{2} w^2 i^2 [V_{i+1}^{k+1} - 2V_i^{k+1} + V_{i-1}^{k+1}] + \frac{1}{2} r_b i [V_{i+1}^{k+1} - V_{i-1}^{k+1}] - r V_i^k = 0$$

qui donnent par addition **Crank-Nicholson**

$a_i V_{i+1}^{k+1} + b_i V_i^{k+1} + c_i V_{i-1}^{k+1} = -a_i V_{i+1}^k + d_i V_i^k - c_i V_{i-1}^k$ pour $i = 1 \dots N-1$
avec

$$a_i = \frac{1}{4} i (w^2 i + r_b)$$

$$b_i = -1 - \frac{1}{2} (r - w^2 i^2)$$

$$c_i = \frac{1}{4} i (w^2 i - r_b)$$

$$d_i = -1 + \frac{1}{2} (r + w^2 i^2)$$

Conditions aux bornes

$i = 0,$

$$V_0^{k+1} = \frac{1}{1+r} V_0^k$$

$i = N,$

$$V_N^{k+1} = \frac{1}{1+r} [V_N^k + r_b N (V_N^k - V_{N-1}^k)]$$

$k = 0,$

$V =$ valeur intrinsèque

Pour résoudre l'équation, on doit inverser une matrice $[N-1, N-1]$ tri-diagonale. Pour cela, on utilisera la méthode de décomposition LU pour résoudre le système des $N-1$ équations s'il s'agit d'une option européenne ou une méthode SOR pour valoriser une option américaine. Le modèle EANO combine ces deux méthodes puisque les stock options sont partiellement américaines. Pour introduire l'exercice automatique au dessus d'un certain seuil, il convient tout d'abord de décaler la grille pour que le pas tombe sur le seuil puis de fixer comme condition aux bornes sur ce pas la valeur intrinsèque.

Dividendes

Quand un dividende détache à la date t , il suffit de décaler les V_i vers le bas en interpolant du montant du dividende.

